



## **APLICAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO ÀS PLACAS FINAS INCLUINDO O EFEITO DA NÃO-LINEARIDADE GEOMÉTRICA**

**João Bosco Pereira Duarte**

Universidade Federal de Roraima, Departamento de Estruturas  
Campus do Paricarana, BR 174 S/N - Boa Vista- RR CEP 69310-270, BRASIL

**Leandro Palermo Júnior**

Universidade Estadual de Campinas, Departamento de Estruturas  
Cx. P. 6021 – 13083-970 – Campinas, SP, Brasil

***Resumo.** O Método dos Elementos de Contorno (MEC) têm sido utilizado para resolver problemas de engenharia com eficiência e precisão. Este trabalho apresenta a solução elástica de placas finas, homogêneas, isotrópicas com o efeito da não linearidade geométrica usando o MEC. A implementação numérica incluiu o uso de elementos lineares no contorno e no domínio, onde os últimos foram necessários para o tratamento do efeito da não linearidade geométrica. Elementos de contorno contínuos ou descontínuos foram usados de acordo com as características do problema de valor de contorno e seus nós foram colocados nas extremidades dos elementos, que também foram os lugares geométricos dos pontos de colocação. Quando utilizou-se elementos descontínuos, os pontos de colocação foram deslocados para o interior do elemento a uma distância igual a um quarto do comprimento do mesmo. Formulações analíticas foram desenvolvidas para tratar as integrais de contorno na região contendo o ponto de colocação e integrais numéricas com a quadratura de Gauss foram utilizadas nas demais regiões. Adicionalmente, as integrais de domínio foram transformadas em integrais no contorno para cada célula e calculadas numericamente. Cargas críticas foram obtidas com diferentes condições de vinculação nas bordas e comparadas com os resultados disponíveis na literatura.*

***Palavras-chave:** Instabilidade, Placas finas, Método dos Elementos de Contorno (MEC).*

### **1. INTRODUÇÃO**

O efeito da não-linearidade geométrica na análise de placas finas foi introduzido neste trabalho com o objetivo de obter cargas críticas. O equilíbrio na posição deformada, acoplando os efeitos do estado plano de tensão com o da flexão de placas, resultou no desenvolvimento da equação integral para o problema de instabilidade de uma placa. As respostas da análise numérica foram comparadas com as disponíveis na literatura.

## 2. EQUAÇÃO INTEGRAL PARA INSTABILIDADE DE PLACAS FINAS

De acordo com (Timoshenko, 1959) a equação diferencial para instabilidade de placas finas, contidas no plano  $\mathbf{xy}$ , é dada pela seguinte expressão:

$$D\nabla^4 w(x, y) + N_{ij}(x, y)w_{,ij}(x, y) = 0 \quad (1)$$

em que  $\nabla^4$  é um operador diferencial do tipo:

$$\nabla^4 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \cdot \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4},$$

$w$  é a flecha,  $w_{,ij}$  são as curvaturas,  $N_{ij}$  é o tensor do carregamento contido no plano da placa,  $D$  representa a rigidez a flexão dada por:

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad (2)$$

$h$  é a espessura,  $E$  e  $\nu$  representam o módulo de Young e o coeficiente de Poisson da placa respectivamente.

O tratamento usado neste trabalho para incluir o efeito da não linearidade geométrica (NLG) nas equações integrais de contorno é análogo ao apresentado em (Costa, 1985). Assim, o termo que contém o efeito do carregamento contido no plano da placa, ou o devido a NLG, é incluído como uma integral de domínio. A equação integral de contorno é escrita da seguinte forma:

$$K_a w + \int_{\Gamma} \left[ V_n^* w - M_n^* \frac{\partial w}{\partial n} \right] d\Gamma + \sum_{i=1}^{N_c} (M_{ns\lambda_j}^* - M_{ns\lambda_k}^*) w_{ci} = \int_{\Gamma} \left[ V_n w^* - M_n \frac{\partial w^*}{\partial n} \right] d\Gamma + \sum_{i=1}^{N_c} (M_{ns\lambda_j}^* - M_{ns\lambda_k}^*) w_{ci}^* + \lambda_b \int_{\Omega} \bar{N}_{ij} w_{,ij} w^* d\Omega = 0 \quad (3)$$

em que  $K_a$  vale 0.5 quando o contorno tem tangente contínua;  $N_c$  é o número de cantos;  $\frac{\partial w}{\partial n}$ ,

$M_n$  e  $V_n$ , representam a rotação, o momento fletor na direção normal e o esforço cortante equivalente, respectivamente e  $w^*$  representa a solução fundamental para flecha devido a Danson, sendo dada por:

$$w^* = \frac{1}{8\pi D} r^2 \left( \ln r - \frac{1}{2} \right) \quad (4)$$

em que  $r$  representa a distância entre o ponto de colocação (fonte) e aqueles situados no campo; Os valores  $\frac{\partial w^*}{\partial n}$ ,  $V_n^*$ ,  $M_n^*$  foram obtidos da solução fundamental e são dados por:

$$\frac{\partial w^*}{\partial n} = \frac{1}{4\pi D} r \ln r \frac{\partial r}{\partial n} \quad (5)$$

$$\mathbf{M}_n^* = -\frac{1}{4\pi} \left[ (1+\nu) \ln r + \left( \frac{\partial r}{\partial n} \right)^2 + \nu \left( \frac{\partial r}{\partial s} \right)^2 \right] \quad (6)$$

$$\mathbf{V}_n^* = \frac{1}{4\pi r} \left[ (1-\nu)^2 \frac{\partial r}{\partial n} \left( \frac{\partial r}{\partial s} \right)^2 - \frac{\partial r}{\partial n} (3-\nu) \right] \quad (7)$$

Deve-se notar que o efeito do carregamento no plano médio da placa foi escrito através de um fator de ampliação  $\lambda_b$  multiplicado a um tensor devido a um carregamento unitário. Assim, a equação integral de instabilidade de placas foi escrita usando a igualdade:

$$\int_{\Omega} N_{ij} w_{,ij} w^* d\Omega = \lambda_b \int_{\Omega} \bar{N}_{ij} w_{,ij} w^* d\Omega, \quad (8)$$

em que  $\lambda_b$  é o fator de ampliação de carregamento e  $\bar{N}_{ij}$  é o tensor devido a um carregamento unitário proporcional ao carregamento contido no plano da placa. Devido ao tensor  $\bar{N}_{ij}$  ser admitido constante no domínio da placa, a equação de equilíbrio de tensões no elemento infinitesimal na foi utilizada pelas variações do tensor  $\bar{N}_{ij}$  serem nulas no domínio.

Da análise da equação integral (3), identificam-se os seguintes parâmetros nodais: deslocamento  $\mathbf{w}$ , rotação  $\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial n}$ , cortante equivalente  $\mathbf{V}_n$  e momento fletor normal  $\mathbf{M}_n$ . Para obter o sistema de equações lineares com o MEC, sabe-se que sempre existem dois valores incógnitos e dois valores conhecidos em cada nó. Assim a equação integral (3) foi escrita duas vezes em cada nó de contorno ou seja, uma vez com o ponto de colocação situado no contorno e a outra com o ponto de colocação posicionado a uma distância igual a média dos comprimentos dos elementos de contorno adjacentes ao nó, (Palermo, 1989). O sistema de equações, assim obtido a partir de (3), pode ser assim escrito na forma matricial:

$$[H] \{u\} = [G] \{p\} + \lambda_b [B] \{y\}, \quad (9)$$

com os vetores  $\{u\}$  e  $\{p\}$  representando os deslocamentos  $(\mathbf{w}, \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial n})$  e esforços  $(\mathbf{V}_n, \mathbf{M}_n)$  atuantes no contorno, respectivamente;  $[H]$  e  $[G]$  são matrizes relacionadas aos deslocamentos e esforços, respectivamente; o vetor  $\{y\}$  é o das curvaturas e  $[B]$  é a matriz dos coeficientes devido a integração no domínio.

Se no sistema de equações (9) forem impostas as condições fixadas (ou conhecidas) do problema estudado, obtém-se um sistema de  $2N$  equações nas  $2N$  incógnitas relacionadas aos  $N$  nós de contorno. Reagrupando as matrizes  $[H]$  e  $[G]$  de forma que se tenham apenas valores relativos às incógnitas no contorno em um membro e os valores conhecidos multiplicados pelos correspondentes elementos das matrizes  $[H]$  e  $[G]$  no outro membro, a Eq. (9) passa a ser escrita na forma:

$$[A_{\Gamma\Gamma}] \{x\} - \lambda_b [B_{\Omega\Gamma}] \{y\} = F \quad (10)$$

em que  $\mathbf{F}$  representa o efeito dos parâmetros conhecidos ou seja, deslocamentos iniciais ou carregamento. Nos problemas para a obtenção de cargas críticas, aqui analisados, o vetor  $\mathbf{F}$  foi nulo. Logo, o sistema de equações tornou-se:

$$[A_{\Gamma\Gamma}]\{x\} - \lambda_b [B_{\Omega\Gamma}]\{y\} = 0 \quad (11)$$

em que a matriz  $[A_{\Gamma\Gamma}]$  contém elementos invariantes em relação à carga crítica e  $[B_{\Omega\Gamma}]$  é uma matriz cujo elementos alteram-se em relação a carga crítica.

Como adiantou-se para a equação (3), o efeito das curvaturas representa o efeito da não linearidade geométrica. Para a solução do problema foi usado um processo iterativo onde estas curvaturas tinham um valor inicial arbitrado e que sofriam um processo de convergência ao se determinar as cargas críticas. Enquanto as curvaturas no contorno eram obtidas a partir de suas relações com os parâmetros nodais, na porção interna utilizaram-se as correspondentes equações integrais que forneciam os valores de curvaturas a partir dos parâmetros nodais no contorno, ou seja:

$$w_{,ij} + \int_{\Gamma} \left[ V_{n,ij}^* w - M_{n,ij}^* \frac{\partial w}{\partial n} \right] d\Gamma + \sum_{i=1}^{N_c} \left( M_{ns\lambda_j}^* - M_{ns\lambda_k}^* \right)_{,ij} w_{ci} = \int_{\Gamma} \left[ V_n w_{,ij}^* - M_n \frac{\partial w^*}{\partial n} \right]_{,ij} d\Gamma + \sum_{i=1}^{N_c} \left( M_{ns\lambda_j} - M_{ns\lambda_k} \right) w_{ci}^* + \int_{\Omega} \lambda_b \bar{N}_{ij} w_{,ij} w_{,ij}^* d\Omega \quad (12)$$

As segundas derivadas das expressões relacionadas à solução fundamental são dadas por:

$$w^*_{,ij} = \frac{1}{4\pi D} (\ln r \delta_{ij} + r_{,i} r_{,j}), \quad (13)$$

$$\frac{\partial w^*}{\partial n}_{,ij} = \frac{1}{4\pi D r} \left[ (\delta_{ij} - 2r_{,i} r_{,j}) \frac{\partial r}{\partial n} + r_{,i} n_j + r_{,j} n_i \right] \quad (14)$$

$$V_{n,ij}^* = \frac{1}{4\pi D r^3} \left\{ \left[ (6r_{,i} r_{,j} - \delta_{ij}) 8 \frac{\partial r}{\partial n} \left( \frac{\partial r}{\partial s} \right)^2 - 8 \left( \frac{\partial r}{\partial s} \right)^2 (r_{,i} n_j + r_{,j} n_i) + \right. \right. \\ \left. \left. - 16 \frac{\partial r}{\partial n} \frac{\partial r}{\partial s} (r_{,i} s_j + r_{,j} s_i) + 4 \frac{\partial r}{\partial s} (s_i n_j + n_j s_i) + \right. \right. \\ \left. \left. + 2 \frac{\partial r}{\partial n} (2s_i s_j - 4r_{,i} r_{,j} + \delta_{ij}) + 2(r_{,i} n_j + r_{,j} n_i) \right] (1-\nu) + \right. \\ \left. + 4 \frac{\partial r}{\partial n} (\delta_{ij} - 4r_{,i} r_{,j}) + 4(r_{,i} n_j + r_{,j} n_i) \right\}, \quad (15)$$

$$M_{n,ij}^* = \frac{1}{4\pi D r^3} \left\{ \left[ (1-\nu) - 2 \left( \frac{\partial r}{\partial n} \right)^2 - 2\nu \left( \frac{\partial r}{\partial s} \right)^2 \right] (\delta_{ij} - 2r_{,i} r_{,j}) + \right. \\ \left. - 4 \frac{\partial r}{\partial n} (r_{,i} n_j + r_{,j} n_i) - 4\nu \frac{\partial r}{\partial s} (r_{,i} s_j + r_{,j} s_i) + \right. \\ \left. + 4r_{,i} r_{,j} \left( \frac{\partial r}{\partial n} \right)^2 + 4r_{,i} r_{,j} \nu \left( \frac{\partial r}{\partial s} \right)^2 + 2n_i n_j + 2\nu n_i n_j \right\} \quad (16)$$

$$M_{ns,ij}^* = \frac{(1-\nu)}{4\pi a^2} \left\{ 2(\delta_{ij} - 4r_{,i} r_{,j}) \frac{\partial r}{\partial n} \frac{\partial r}{\partial s} + 2 \left[ (r_{,j} s_i + r_{,i} s_j) \frac{\partial r}{\partial n} + (r_{,i} n_j + r_{,j} n_i) \frac{\partial r}{\partial s} \right] - n_i s_j - n_j s_i \right\}. \quad (17)$$

A Eq.(12) escrita na forma matricial é dada por:

$$\{y\} = [A_{r\Omega}] \{x\} - \lambda_b [B_{\Omega\Omega}] \{y\}. \quad (18)$$

Assim, para a determinação das cargas críticas, foram utilizados os dois sistemas de equações acoplados:

$$\begin{cases} [A_{r\Gamma}] \{x\} - \lambda_b [B_{\Omega\Gamma}] \{y\} = 0 & (a) \\ \{y\} = [A_{r\Omega}] \{x\} - \lambda_b [B_{\Omega\Omega}] \{y\} & (b) \end{cases} \quad (19)$$

### 3. PROBLEMAS DE AUTO-VALORES

O sistema de equações dado em (19) representa uma forma clássica de um problema de auto-valor. Para o seu cálculo, tem-se vários métodos numéricos com vantagens e desvantagens próprias. O método utilizado neste trabalho, para determinação dos auto-valores, foi iterativo. Neste método, o vetor das curvaturas  $\{y\}$  assumia um valor inicial  $\{y\}^0$  e determinava-se o vetor  $\{x\}^0$  dos deslocamentos e esforços na Eq.(19(a)). Com o vetor  $\{x\}^0$  e  $\{y\}^0$  determinava-se um novo vetor  $\{y\}^1$  na Eq.(19(b)). Assim, o processo iterativo foi:

$$\begin{cases} [A_{r\Gamma}] \{x\}^k - \lambda_b [B_{\Omega\Gamma}] \{y\}^{k-1} = 0 \\ \{y\}^k = [A_{r\Omega}] \{x\}^k - \lambda_b [B_{\Omega\Omega}] \{y\}^{k-1} \end{cases} \quad (20)$$

ou

$$\begin{cases} [A_{r\Gamma}] \{x\}^k = \lambda_b [B_{\Omega\Gamma}] \{y\}^{k-1} \\ \{y\}^k = [A_{r\Omega}] \{x\}^k - \lambda_b [B_{\Omega\Omega}] \{y\}^{k-1} \end{cases} \quad (21)$$

Na k-ésima iteração o valor da carga crítica dada pelo fator de carga  $\lambda_b$  e o modo da flambagem dado pelo vetor  $\{y\}^k$  eram determinados. O processo iterativo era concluído quando a diferença relativa entre duas aproximações sucessivas do auto-valor fosse menor que a precisão desejada. Para o cálculo do auto-valor ou carga crítica  $N_{cr}$  foi utilizado o quociente Rayleigh, ou seja:

$$N_{cr} = \lambda_b = \frac{\{y\}^{k,t} \cdot \{y\}^{k-1}}{\{y\}^{k,t} \cdot \{y\}^k} \quad (22)$$

#### 4. RESULTADOS NUMÉRICOS

Para mostrar a eficiência do método numérico utilizado na análise das placas finas, seguem exemplos onde os valores obtidos foram comparados com os disponíveis na literatura e cujas respostas são apresentadas nas Tabelas 1, 2 e 3. Nestes exemplos foram adotados as seguintes discretizações, de acordo com as dimensões da placas:

- Para  $a = 1.0$  m e  $b = 1.0$  m tem-se 36 nós no contorno, 9 nós internos, 32 elementos de contorno e 32 células de domínio;
- Para  $a = 1.5$  m e  $b = 1.0$  m tem-se 44 nós no contorno, 15 nós internos, 42 elementos de contorno e 48 células de domínio;
- Para  $a = 2.0$  m e  $b = 1.0$  m tem-se 52 nós no contorno, 21 nós internos, 48 elementos e 64 células de domínio.

Tabela 1. Resultados obtidos para carregamento  $N_{xx} = N$ ,  $N_{yy} = N_{xy} = 0$ .

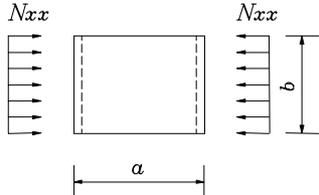
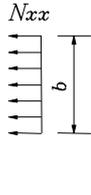
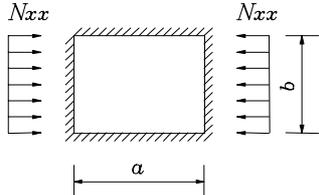
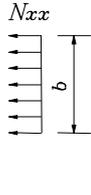
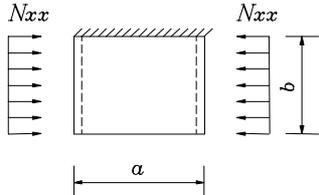
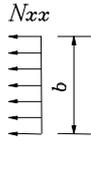
Placas $E = 1.000 \text{ N} / \text{m}^2$ $h = 0.1 \text{ m}$ e $\nu = 0.3$		Dimensões (m)	Valor da carga crítica $N_{cr}$ determinado em (Bares,1969)	Valor determinado neste trabalho
		$a = 1.0$ $b = 1.0$	0.904	0.908
		$a = 2.0$ $b = 1.0$	0.226	0.226
		$a = 1.0$ $b = 1.0$	9.34	9.53
		$a = 2.0$ $b = 1.0$	7.18	7.34
		$a = 1.0$ $b = 1.0$	1.53	1.57
		$a = 2.0$ $b = 1.0$	1.24	1.26

Tabela 2. Resultados obtidos para carregamento  $N_{yy} = N$ ,  $N_{xx} = N_{xy} = 0$ .

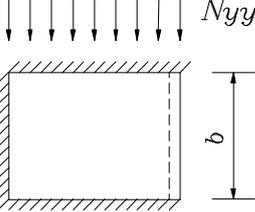
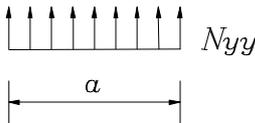
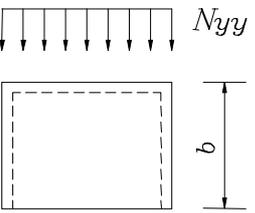
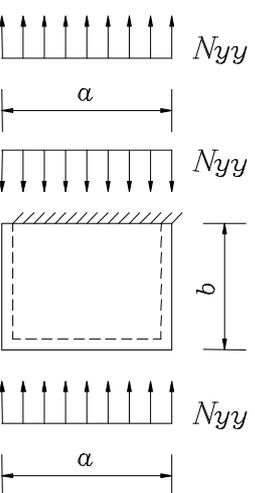
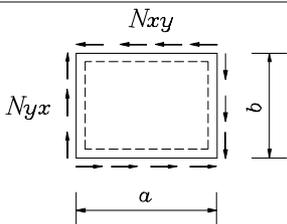
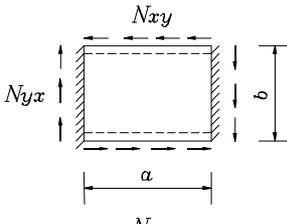
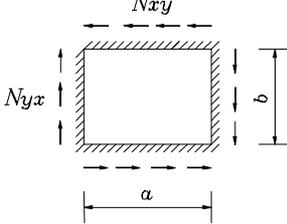
Placas $E = 1.000 \text{ N} / \text{m}^2$ $h = 0.1 \text{ m}$ e $\nu = 0.0$	Dimensões (m)	Valor da carga crítica $N_{cr}$ (N/m) determinado em (Bares,1969)	Valor determinado neste trabalho
	$a = 1.0 \quad b = 1.0$	6.66	6.85
	$a = 2.0 \quad b = 1.0$	14.98	15.33
	$a = 1.0 \quad b = 1.0$	1.94	1.97
	$a = 1.5 \quad b = 1.0$	1.80	1.93
	$a = 1.0 \quad b = 1.0$	3.93	4.04
	$a = 2.0 \quad b = 1.0$	5.72	5.87
			

Tabela 3. Resultados obtidos para carregamento  $N_{yy} = N_{xx} = 0$ ,  $N_{xy} = N$ .

Placas $E = 1.000 \text{ N} / \text{m}^2$ $h = 0.1 \text{ m}$ e $\nu = 0.3$	Dimensões (m)	Valor da carga crítica $N_{cr}$ (N/m) determinado em (Bares, 1969)	Valor determinado neste trabalho
	$a = 1.0$ $b = 1.0$	8.44	8.57
	$a = 2.0$ $b = 1.0$	5.85	5.98
	$a = 1.0$ $b = 1.0$	11.10	11.27
	$a = 2.0$ $b = 1.0$	9.23	9.34
	$a = 1.0$ $b = 1.0$	13.18	13.36
	$a = 2.0$ $b = 1.0$	9.91	10.12

Pode-se afirmar que o desempenho da formulação desenvolvida foi bom nos exemplos apresentados. Assim, sugere-se o uso da iteração vetorial com o quociente de Rayleigh a estes problemas de auto-valor tratados com o MEC pois, o processo de convergência foi rápido e o auto-vetor inicial, de valor unitário, foi usado em todos exemplos sem prejudicar a velocidade de convergência.

### Agradecimentos

A CAPES-PICD pela financiamento deste trabalho e ao Departamento de Estruturas da Universidade Federal de Roraima – UFRR pelo apoio.

### 5. REFERÊNCIAS

- Abramowitz M., I., 1972, Stegun, Handbook of Mathematical Functions, Dover Publications, New York.
- Bares, R., 1969, Tables pour le calcul des dalles et des parois. Paris. Dunod, 535p.
- Becker A. A., 1992, The Boundary Element Method in Engineering, McGraw - Hill Book Company, London.
- Costa Jr., J. A., 1985, The Boundary Element Method Applied to Plate Problems, Southampton, Department of Civil Engineering, The University of Southampton, (PhD Thesis, supervisor C. A. Brebbia).

- Brebbia C. A., Telles J.C.F., Wrobel L. C., 1984, Boundary Element Techniques, Springer-Verlag, Berlin, Germany.
- Costa Jr., J. A., 1985, The Boundary Element Method Applied to Plate Problems, Southampton, Department of Civil Engineering, The University of Southampton, (PhD Thesis, supervisor C. A. Brebbia).
- Palermo Jr., L., 1989, Análise de Peças de Seção Delgada como Associação de Placas pelo Método dos Elementos de Contorno, Universidade de São Paulo, São Carlos, 151p.
- Telles, J.C.F, Brebbia C. A., 1981, Boundary Element: New Developments in Elastoplastic Analysis, Appl. Math. Modeling, 1981
- Timoshenko, S. P., Woinowssky-Krieger, S., 1959, Theory of Plates and Shells, McGraw-Hill Book Company, New York.

## **THE BOUNDARY ELEMENT METHOD APPLIED TO THIN PLATES ANALYSIS INCLUDING THE GEOMETRICAL NON LINEARITY EFFECT**

**João Bosco Pereira Duarte**

Universidade Federal de Roraima, Departamento de Estruturas  
Campus do Paricarana, BR 174 S/N - Boa Vista- RR CEP 69310-270, BRASIL

**Leandro Palermo Júnior**

Universidade Estadual de Campinas, Departamento de Estruturas  
Cx. P. 6021 – 13083-970 – Campinas, SP, Brasil

***Abstract.** The Boundary Element Method (BEM) has been used to solve engineering problems with efficiency and accuracy. This study intends to present an elastic thin plates analysis including the geometrical non linearity effect applied to an isotropic and homogeneous material using the BEM. The isoparametric linear elements were used to entail discretisation of both the boundary and the domain. Continuous or discontinuous boundary elements were used according to the boundary value problem and the domain integrals related to the geometrical non linearity effect were converted to equivalent boundary integral at each domain cell. All nodal parameters were placed at the ends of the elements and when discontinuous elements were used the collocation points were shifted to the element inside at distance equal to a quarter of the element length. Analytical formulations were developed to perform boundary integrals over the region including the collocation point using the Cauchy principal value sense and numerical integration using standard Gaussian quadrature formulae were used to evaluate integrals on the other region. Critical loads were obtained with some boundary conditions and compared with the available results from the literature.*

**Keywords:** Critical Loads, Thin Plates, Boundary Element Method (BEM)